

Einstein-Hermite 계량에 관한 연구

박기성

1. 서론

Compact Kähler 다양체 (X, ω) 위에 주어진 Hermite 벡터속 (E, h) 에 대하여 Einstein 조건을 생각하자. 즉 E 의 내부 준동형 K 가 E 의 항등내부 준동형의 스칼라 배가 될 때를 말한다. 이와 같은 Einstein 조건을 만족하면 E 를 Einstein-Hermitian 벡터속이라고 한다.

S. Kobayashi [K]는 compact Kähler 다양체 위의 정칙 벡터속에 Einstein-Hermite 계량의 개념을 도입하였다. 이 계량이 이 벡터속의 안정성과 깊은 관계가 있음을 Donaldson [D]에 의하여 증명되었다.

본 논문에서는 연접층 (Coherent sheaf)에 대하여도 벡터속에 대한 결과가 자연히 확장됨을 증명하였다.

2. 본문

Kähler 형 ω 인 n 차원 compact Kähler 다양체 (X, ω) 위의 Hermite 정칙벡터속 (E, h) 의 곡률 F 와 평균곡률 H 는 국소정칙표구를 사용하여 다음과 같이 표시하자.

$$F = \bar{\partial}(\partial h h^{-1}), \quad H = \text{tr}_\omega F.$$

여기서 tr_ω 는 F 가 내부 준동형속 $\text{End}(E)$ 에서 값을 갖는 2-형으로 보고 저공간 방향과 같은 적 (trace)을 잡은 것이라 하자. 바꿔 말하면 (E, h) 가 Einstein-Hermite란 $\text{End}(E)$ 에서 값을 갖는 평균곡률 H 가 항등변환의 상수배와 같을 때를 말한다. (X, ω) 위의 torsion을 갖지 않는 연접해석

층 $\mathcal{E}$ 의 기울기는 다음과 같이 정의된다.

$$\mu(\mathcal{E}) = (c_1(\mathcal{E}) \cup [\omega]^{n-1})[X]/\text{rank } \mathcal{E}.$$

여기서 $c_1(\mathcal{E})$ 은 $\mathcal{E}$ 의 차수이다.

$\mathcal{E}$ 가 안정(준안정)이란 $\mathcal{E}$ 의 임의의 진부분속 S 가 $0 < \text{rank } S < \text{rank } \mathcal{E}$ 에 대하여

$$\mu(S) < \mu(\mathcal{E}), \quad (\mu(S) \leq \mu(\mathcal{E}))$$

이 성립할 때를 말한다. 또 $\mathcal{E}$ 가 기울기가 같은 안정속의 직합으로 분해될 때 다중안정이라 부른다.

다음 정리는 벡터속의 경우의 안정성과 Einstein-Hermite계량사이의 관계를 나타내고 있다 [D], [U - Y].

정리. [K] 정칙벡터속 E 는 다중안정일 때 그 때에 한해서 Einstein-Hermite 계량을 갖는다.

본 연구의 목적은 위의 결과를 연접층의 경우까지 확장하고자 한다. 그러기 위해서는 연접층의 Hermite 계량은 무엇인지 알아야 하며 여기서 연접층은 반사적인 것만 생각한다. 연접층 $\mathcal{E}$ 이 반사적이란 $\mathcal{E}$ 이 $\mathcal{E}$ 의 이중쌍대 $\mathcal{E}^{**}$ 와 동형일때를 말한다. 여기서 반사성을 도입하는 이유는 일반적으로 $\mathcal{E}$ 와 $\mathcal{E}^{**}$ 의 안정성은 동치이고 $\mathcal{E}$ 의 Hermite 계량은 $\mathcal{E}^{**}$ 의 Hermite 계량을 자동적으로 유도하기 때문이다.

연접층 $\mathcal{E}$ 의 특이점집합 S 밖에서 정의된 $\mathcal{E}$ 의 Hermite 계량 h 를 연접층 $\mathcal{E}$ 의 Hermite 계량이라 하자. 그러나 이것만으로는 $\mathcal{E}$ 의 특이성이 통제되지 않기 때문에 h 가 다음 성질을 가질때 허용적이라 하고 그와 같은 Hermite 계량을 벡터속의 Hermite 계량이라 하자.

i) 평균곡률 H 는 일양유계이다.

ii) 그의 곡률 F 는 자승가적분이다.

정리 1. S 를 Kähler 다양체 (Y, ω) 내의 실여차원 4의 Hausdorff 측도가 국소유한인 폐집합이라 하고 (E, h) 를 S 의 보집합 위에서 정의된 Hermite 정칙벡터속이라 하자. (E, h) 의 곡률 F 가 국소자승가적분이라 하면 다음이 성립한다.

- (1) E 는 Y 위의 반사적 연결층으로 확장되며 $\mathcal{E}$ 의 국소절단 $s \in \Gamma(U, \mathcal{E})$ 에 대하여 함수 $\log^+ h(s, s)$ 는 $H^1_{loc}(U)$ 에 속한다.
- (2) 평균곡률 H 가 국소유한이면 $h(s, s)$ 도 국소유한이고 h 는 $\mathcal{E}$ 이 벡터속일 때는 임의의 유한의 p 에 대하여 $L^p_{2,loc}$ 에 속한다.
- (3) (E, h) 가 Einstein-Hermite이면 $\mathcal{E}$ 이 벡터속이 되는 개집합까지 확장되며 여기서 Einstein-Hermite 계량이 정해진다.

정리 2. 임의의 반사적 연결층은 Hermite 계량을 갖는다.

명제 3. h 를 Hermite 행렬에서 값을 갖는 (Y, ω) 위의 H^1 에 속하는 함수로서 h 와 h^{-1} 가 유계, 즉 유계인 f 가 존재하여 약한 의미로 다음이 성립한다고 하자.

$$\mathrm{tr}_\omega \bar{\partial}(\partial h h^{-1}) = f$$

라 하면 h 는 임의의 $0 < \alpha < 1$ 에 대하여 $C^{1,\alpha}_{loc}$ 에 속한다.

정리 4. $[Na] (E_i, \nabla_i)$ 을 리-만 다양체 위의 Hermite Yang-Mills 접속의 열이라 하자. 만약 그의 곡률 F_i 의 L^2 -norm이 유계이면 어떤 부분열이 존재하여 적당히 gauge 변환을 하면 여차원 4의 Hausdorff 측도가 국소유계인 폐집합 밖에서 어떤 Yang-Mills 접속에 수렴한다. 또 그의 곡률은 자승가적분이다.

제 5. compact Kähler 다양체 (X, ω) 위의 제1, 제2 Chern 류가 일정

한 Einstein-Hermite 벡터속 (E_i, h_i) 의 열은 적당히 부분열을 잡아 Gauge 변환을 하면 실여차원 4의 Hausdorff 측도가 유한인 폐집합 밖에서 X 전체에서 정의된 반사적인 허용적 Einstein-Hermite 연결층에 수렴한다.

벡터속의 열이 퇴화하여 층이 되는 현상은 복소차원인 경우에는 많이 알려졌다으나 고차원인 경우는 별로 알려지지 않고 있다.

정리 6. compact Kähler 다양체 위의 반사적 연결층은 다중안정일 때 그때에 한해서 허용적 Einstein-Hermite 계량을 갖는다.

벡터속의 경우와 마찬가지로 Chern-Weil 동형을 이용하여 Bogomolov 형의 부등식을 얻는다.

계 7. 계수 r 의 반사적 다중안정 연결층 $\mathcal{E}$ 에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

$$(2rc_2(\mathcal{E}) - (r-1)c_1(\mathcal{E})^2) \cup [\omega]^{n-2}[X] \geq 0.$$

여기서 $\mathcal{E}$ 이 벡터속이고 Einstein-Hermite 계량이 주어진 접속이 사영적으로 평탄일 때 등호가 성립한다.

명제 8. n 차원 compact Kähler 다양체 (X, ω) 위의 반사적이고 허용적 Einstein-Hermite 연결층 $\mathcal{E}$ 의 대국절단은 $\mu(\mathcal{E}) < 0$, $\mu(\mathcal{E}) = 0$ 에 따라 영절단 또는 평행절단일 때이다.

참고 문헌

- [K] S. Kobayashi, "Differential geometry of holomorphic vector bundles," Princeton University Press (1987).

- [D] S.K. Donaldson, *Infinite determinants, stable bundles and curvature*, Duke Math. J. **54** (1987) 231-247.
- [U-Y] K. Uhlenbeck and S-T. Yau, *On the existence of Hermitian Yang-Mills connection in stable vector bundles*, Comm. pure Appl. Math. **42** (1989) 703-707.
- [B] S. Bando, *Removable singularities of holomorphic vector bundles*, Tohoku Math. J. **43** (1991) 61-67.
- [S] Y.T. Siu, *A Hartogs type extension theorem for coherent analytic sheaves*, Ann. of Math. **93** (1971) 166-188
- [H] S. Hildebrandt, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, in "Harmonic mappings and minimal immersions", Lec. note Math. **1161**, Springer-Verlag (1985), 1-117.
- [Na] H. Nakajima, *Compactness of the moduli space of Yang-Mills connections in higher dimensions*, J. Math. Soc. Japan. **40** (1988).

강남대학교 수학과

경기도 용인군 기흥읍 구갈리 산 6-2

(우) 449-900